Probeklausur zur Vorlesung *Panorama der Mathematik*

Dr. Moritz Firsching

Sommersemester 2017

Donnerstag, 20.IV.2017

Name: Musterlösung

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Σ
Punkte	9	6	9	5	4	6	4	5	10	58
erreicht										

Bearbeiten Sie die Aufgaben in dem dafür freigelassenen Platz. Nutzen Sie die Rückseite, falls sie mehr Platz benötigen.

1. Wir betrachten folgende Abbildungen:

(a) (6P)

$$f\colon \{0,1,2,3,4\} \to \{0,1,2,3,4\}$$
$$x \mapsto 4-x$$

$$g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$x \mapsto x+1$$

Markieren Sie wahre Aussagen:

- ☒ f ist surjektiv.
- ☒ f ist injektiv.
- ☒ f ist bijektiv.
- ○ g ist surjektiv.
- ☒ g ist injektiv.
- ○ g ist bijektiv.

(b) Geben Sie eine Abbildung $b\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ an, die surjektiv, aber nicht injektiv ist. (3P)

$$b\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$$
$$z \mapsto |z|$$

2. Eine Folge von Ziffern $a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$ soll als b-adische Darstellung der natürlichen Zahl (6P)

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b^k$$

aufgefasst werden. Ordnen sie die folgenden Zahlen nach ihrem Betrag aufsteigend:

A. 1111 als 2-adische Zahl, $1+2+4+8 = 15$

B. 111 als 3-adische Zahl, $1+3+9 = 13$

C. 22 als 5-adische Zahl, $2+2\cdot 5 = 12$

D. 22 als 6-adische Zahl. $2+2\cdot 6 = 14$

C < B < D < A

3. Es sei $z = a + ib \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl. Wir betrachten die zu z konjugierte Zahl

$$\bar{z} := a - ib \in \mathbb{C}.$$

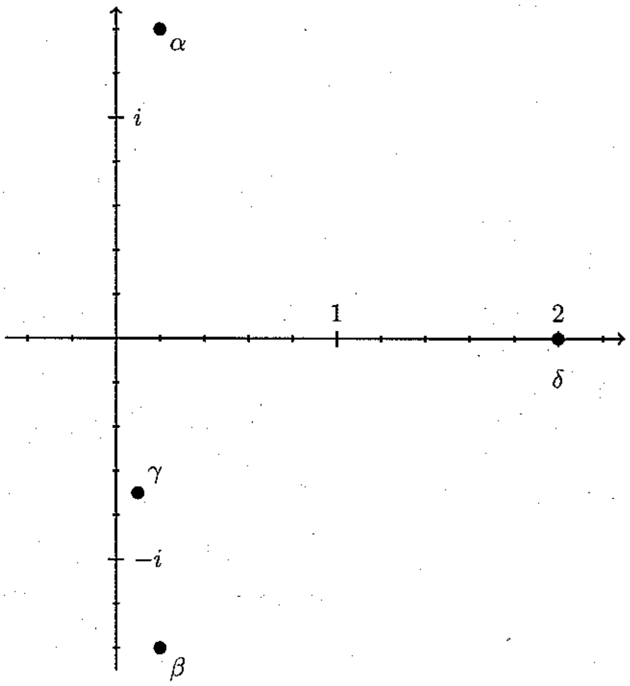
(a) Zeigen Sie: $z \cdot \bar{z} \in \mathbb{R}$. (3P)

$$z \cdot \bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 + iab - iab - (ib)^2$$
$$= a^2 + b^2 \in \mathbb{R}$$

(b) Zeigen Sie: $z^{-1} = \frac{1}{z \cdot \bar{z}} \bar{z}$. (3P)

$$z \cdot \left(\frac{1}{z \cdot \bar{z}} \bar{z}\right) = \frac{1}{z \cdot \bar{z}} \cdot z\bar{z} = 1$$

(c) Nun sei $z = \frac{1}{5} + i\frac{7}{5}$. In der folgenden Abbildung, sind 4 Punkte $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ markiert, die als Elemente in $\mathbb{C}$ aufgefasst werden sollen. (3P)



Vervollständigen Sie folgende Zuordnung:

z : α
$\bar{z}$: β
$z \cdot \bar{z}$: δ
z^{-1} : γ

4. Markieren Sie wahre Aussagen: (5P)

- [x] Wenn A und B abzählbare Mengen sind, dann ist auch die Menge $A \cup B$ abzählbar.
- [x] Wenn A und B abzählbare Mengen sind, dann ist auch die Menge $A \times B$ abzählbar.
- [ ] Wenn A und B abzählbare Mengen sind, dann ist auch die Menge B^A, also die Menge aller Abbildungen
$$f\colon A \to B$$
von A nach B, abzählbar.
- [ ] Wenn A eine abzählbare Menge ist, dann ist auch $\{0,1\}^A$, also die Menge aller Abbildungen
$$f\colon A \to \{0,1\}$$
von A in die zweielementige Menge $\{0,1\}$, abzählbar.
- [ ] Wenn A eine abzählbare Menge ist, dann ist auch die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ eine abzählbare Menge.

5. Was ist die Dimension des $\mathbb{C}$-Vektorraums $M(\mathbb{C},2,2)$ aller (2×2)-Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{C}$? Geben Sie eine Basis an! (4P)

$$\dim(M(\mathbb{C},2,2)) = 4$$

Basis: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

6. Beweisen Sie: *Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 5$ gilt:* (6P)

$$n^2 + 25 \geq 10n.$$

Beweis mit Induktion:

Induktionsanfang $n=5$: $n^2+25 = 25+25 \geq 50 \geq 10\cdot 5 = 10n$

Induktionsschritt: $n \to n+1$

Wir nehmen an, es gilt: $n^2+25 \geq 10n$

und zeigen $(n+1)^2+25 \geq 10(n+1)$.

<u>Lemma</u> Für alle $n \geq 5$ gilt: $2n+1 \geq 10$

<u>Beweis:</u> $n \geq 5 \Rightarrow 2n \geq 10 \Rightarrow 2n+1 \geq 10$

Mit dem Lemma folgt:

$$(n+1)^2+25 = n^2+2n+1+25 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Induktionsvoraussetzung}}}{\geq} 2n+1+10n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Lemma}}}{\geq} 10+10n = 10(n+1)$$

$\square$

Beweis ohne Induktion:

$n \geq 5 \Rightarrow (n-5) \geq 0 \Rightarrow (n-5)^2 \geq 0$

$\Rightarrow n^2 - 10n + 25 \geq 0$

$\Rightarrow n^2+25 \geq 10n$

7. Ordnen Sie die folgenden Mathematiker chronologisch aufsteigend nach ihrem Sterbejahr. (4P)

   A. Alexander Grothendieck
   B. Euklid von Alexandria
   C. Georg Cantor
   D. Muhammad ibn Musa al-Chwarizmi
   E. Leonhard Euler

   B D E C G

8. (a) Geben Sie eine Definition von *„algebraische Zahl"*! (3P)

   Eine Zahl $a \in \mathbb{C}$ heißt algebraisch, falls es ein Polynom $p \in \mathbb{Q}[x]$ gibt, $p \neq 0$, so dass $p(a) = 0$.

   (b) Nennen Sie eine irrationale algebraische Zahl. (1P)

   $\sqrt{2}$

   (c) Nennen Sie eine reelle Zahl, die nicht algebraisch ist. (1P)

   e

9. Betrachten Sie die folgende Funktion S(n) in Pseudocode:

```
S(n)
  if n = 0
    return 0
  else
    return n + S(n - 1)
```

(a) Berechnen Sie S(0), S(1), S(2) und S(7)! (4P)

(b) Geben Sie ein Polynom $p \in \mathbb{Q}[n]$ von Grad 2 an, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung $p(n) = S(n)$ gilt. (4P)

(c) Berechnen Sie S(100) und S(1000). (2P)

(a) $S(0) = 0$

$S(1) = 1 + S(0) = 1 + 0 = 1$

$S(2) = 2 + S(1) = 2 + 1 = 3$

$S(7) = 7 + S(6) = 7 + 6 + S(5) = 13 + 5 + S(4) = 18 + 4 + S(3) = 22 + 3 + S(2)$

$= 25 + 3 = 28$

(b) $p(n) = an^2 + bn + c$

$0 = S(0) = p(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c \Rightarrow p(n) = an^2 + bn$

$1 = S(1) = p(1) = a1^2 + b \cdot 1 = a + b$

$3 = S(2) = p(2) = a2^2 + b \cdot 2 = 4a + 2b$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow p(n) = \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{2} n$

(c) $S(100) = \frac{1}{2} 100^2 + \frac{1}{2} 100 = 5050$

$S(1000) = \frac{1}{2} 1000^2 + \frac{1}{2} 1000 = 500500$